

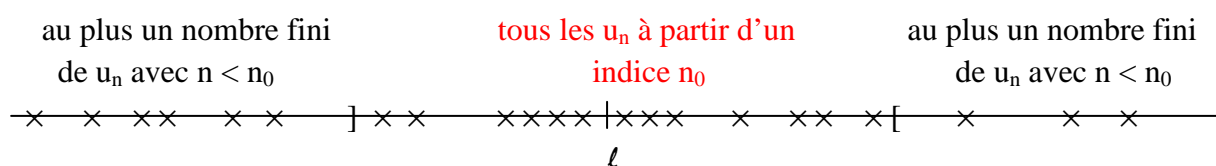
# ETUDE LOCALE ET ASYMPTOTIQUE DES SUITES ET DES FONCTIONS

## I- Limite d'une suite

### 1) Limite réelle

**Définition :** Dire qu'un réel  $l$  est limite d'une suite  $(u_n)$  signifie que **tout** intervalle ouvert de centre  $l$  contient **tous les termes** de la suite **à partir d'un certain indice**.

Le nombre  $l$  s'appelle **la limite** de la suite  $(u_n)$ .



On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ . On dit que  $(u_n)$  **converge vers**  $l$ .

*Exemple :* Les suites  $\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  convergent vers 0.

**Remarque :** Un intervalle ouvert de centre  $l$  est de la forme  $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ , avec  $\varepsilon > 0$ .

$$u_n \in ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[ \Leftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow$  il existe  $n_0$  dans  $\mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n - l| < \varepsilon$ .

**Théorème et définition :** • Si  $(u_n)$  converge vers  $l$ , alors  $l$  est unique.

• Si  $(u_n)$  ne converge pas, alors  $(u_n)$  est divergente. Dans ce cas, soit elle n'a pas de limite, comme par exemple  $(-1)^n$ , soit elle a une limite infinie.

### 2) Limite infinie

**Définition :** Dire que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$  signifie que tout intervalle ouvert de la forme  $]A, +\infty[$  contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain indice**.

On écrit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

*Exemple :* Les suites  $(n)$ ,  $(n^2)$ ,  $(n^3)$ ,  $(\sqrt{n})$  ont pour limite  $+\infty$ .

**Remarques :** • On définit de même :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

• On peut dire aussi que, pour tout réel  $A$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe  $n_0$  dans  $\mathbb{N}$  tel que :

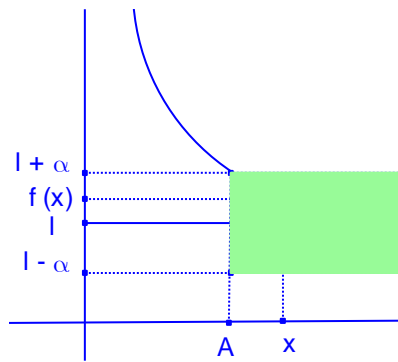
$$\text{si } n \geq n_0, \text{ alors } u_n \geq A.$$

## II- Limites de fonctions à l'infini

### 1) Limite finie en $+\infty$ - Asymptote horizontale

**Définition :** Une fonction  $f$  a **pour limite le nombre  $\ell$  en  $+\infty$**  signifie que tout intervalle ouvert de centre  $\ell$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  prises pour tous les  $x$  assez grands, c'est-à-dire tous les  $x$  d'un intervalle de la forme  $]A, +\infty[$ .

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .



#### Interprétation graphique :

Pour tout intervalle ouvert centré en  $\ell$ , aussi petit soit-il, on peut trouver un réel  $A$  tel que  $C/ ]A, +\infty[$  soit dans la partie colorée.

On dit que la **droite d'équation  $y = \ell$  est asymptote à  $C$  en  $+\infty$** .

**$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x_0$  dans  $\mathbb{R}$  tel que, si  $x \geq x_0$ , alors  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$**

**Remarques :** • On définit de même  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ . Cela signifie que tout intervalle ouvert centré en  $\ell$  contient tous les  $f(x)$  lorsque  $x$  décrit un intervalle de la forme  $] -\infty, A[$ .

• Les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{x}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ),  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  ont pour limite 0 en  $+\infty$ .

*Exemple :* • Soit  $f : x \mapsto \frac{4x - 5}{2x + 3}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$ . Donc la droite  $D$  d'équation  $y = 2$  est asymptote à  $C$ .

#### **Etudions la position de $C$ par rapport à $D$ .**

On étudie le signe de  $f(x) - 2$ . 
$$f(x) - 2 = \frac{4x - 5}{2x + 3} - 2 = \frac{-11}{2x + 3}$$

Donc :  $f(x) - 2$  est du signe contraire de  $2x + 3$ .

Si  $2x + 3 < 0$ , c'est-à-dire  $x < -\frac{3}{2}$ , alors  $f(x) - 2 > 0$ .  $C$  est au-dessus de  $D$ .

Si  $2x + 3 > 0$ , c'est-à-dire  $x > -\frac{3}{2}$ , alors  $f(x) - 2 < 0$ .  $C$  est au-dessous de  $D$ .

### 2) Limite infinie en $+\infty$

**Définition :** Une fonction  $f$  a **pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$**  signifie que tout intervalle ouvert de la forme  $]M, +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  prises pour tous les  $x$  assez grands, c'est-à-dire tous les  $x$  d'un intervalle de la forme  $]A, +\infty[$ .

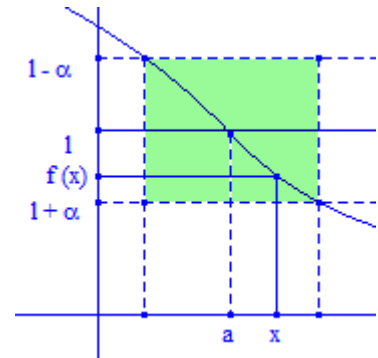
On écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .



On écrit :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

Les valeurs  $f(x)$  s'accroissent autour de  $\ell$  pour tous les  $x$  proches de  $a$ . Donc les distances de  $f(x)$  à  $\ell$  tendent vers 0.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - \ell| = 0.$$



### Interprétation graphique :

Pour tout intervalle ouvert  $I$  de centre  $\ell$ , **aussi petit soit-il**, on peut trouver un intervalle ouvert  $J$  de centre  $a$  tel que  $C_{J/I}$  soit dans la partie colorée.

**Si  $a$  est dans  $D_f$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , alors  $\ell = f(a)$ .**

## IV- Théorèmes de comparaison pour les suites

**Théorème 1 :** Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites. Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n \leq w_n$ , et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .

*Démonstration (BAC) :* Soit  $\varepsilon > 0$ .

Il faut prouver qu'à partir d'un certain rang,  $v_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  donc il existe  $n_1$  dans  $\mathbb{N}$  tel que, si  $n \geq n_1$ , alors  $u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$  donc il existe  $n_2$  dans  $\mathbb{N}$  tel que, si  $n \geq n_2$ , alors  $w_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

De plus, il existe  $n_3$  dans  $\mathbb{N}$  tel que, si  $n \geq n_3$ , alors  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Soit  $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2, n_3)$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a :  $\ell - \varepsilon < u_n, w_n < \ell + \varepsilon, u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Donc :  $\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$ . En particulier :  $\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon$ .

Donc :  $v_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .

**Théorème 2 :** Soient deux suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et un réel  $\ell$ .

Si, à partir d'un certain rang,  $|u_n - \ell| \leq v_n$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

**Théorème 3 :** Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

• Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

• Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

*Démonstration (BAC) :* Soit  $A$  dans  $\mathbb{R}$ .

Montrons qu'à partir d'un certain rang,  $v_n \in ]A, +\infty[$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  donc il existe  $n_1$  dans  $\mathbb{N}$  tel que, si  $n \geq n_1$ , alors  $u_n \in ]A, +\infty[$ .

Il existe  $n_2$  dans  $\mathbb{N}$  tel que, si  $n \geq n_2$ , alors  $u_n \leq v_n$ .

Posons  $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a :  $u_n \in ]A, +\infty[$  et  $u_n \leq v_n$ . Donc :  $v_n \in ]A, +\infty[$ .  
 Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

## V- Théorèmes de comparaison pour les fonctions

Soit  $I = ]b, +\infty[$ . Soient  $f, g, h$  définies sur  $I$ . Soit  $\ell$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 1) Théorème d'encadrement

Si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

*Démonstration (BAC) :*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ . Donc tout intervalle ouvert de centre  $\ell$  contient toutes les valeurs  $g(x)$  et  $h(x)$  pour  $x$  assez grand supérieur à  $b$ . Il contient donc aussi toutes les valeurs  $f(x)$ . Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

*Exemples :* •  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Etudions  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

$-1 \leq \sin x \leq 1$ . Soit  $x > 0$ . Alors :  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ . Or :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

•  $f(x) = \frac{E(x)}{x}$ . On a :  $E(x) \leq x < E(x) + 1$ . Donc :  $x - 1 \leq E(x) < x$ .

$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$ . Or :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

**Conséquence :** Si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ , et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

*Démonstration :*  $|f(x) - \ell| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) - \ell \leq g(x) \Leftrightarrow \ell - g(x) \leq f(x) \leq \ell + g(x)$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ell - g(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ell + g(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

*Exemple :* Etudions la limite en 0 de  $x \sin \frac{1}{x}$ .

$|f(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \times \left| \sin \frac{1}{x} \right|$  Or :  $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ . Donc :  $0 \leq |f(x)| \leq x$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - 0| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

### 2) Comparaison à l'infini

#### **Théorème :**

1) Si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f(x) > g(x)$ , et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2) Si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

*Démonstration du 1 :*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  donc tout intervalle de la forme  $] M ; +\infty [$  contient toutes les valeurs de  $g(x)$  pour  $x$  assez grand. Il contient aussi toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand, puisque  $f(x) > g(x)$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

*Exemples :* • Etudions  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos x$ .

$\cos x \geq -1 \Rightarrow x + \cos x \geq x - 1$  Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos x \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos x = +\infty$ .

• Etudions  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x}$ .

Pour tout  $x > 0$ ,  $x^2 + x \geq x^2$ . Donc :  $\sqrt{x^2 + x} \geq \sqrt{x^2}$ . Or :  $\sqrt{x^2} = |x| = x$ .

Donc :  $\sqrt{x^2 + x} \geq x$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$

## VI- Convergence des suites monotones

**1) Théorème 1 :** Toute suite croissante non majorée a pour limite  $+\infty$ .

*Démonstration (BAC) :* Soit  $(u_n)$  une suite croissante non majorée.

Montrons qu'à partir d'un certain rang,  $u_n \in ] A, +\infty [$ .

$(u_n)$  n'est pas majorée, donc il existe  $n_0$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} \geq A$ .

$(u_n)$  est croissante, donc, pour tout  $n \geq n_0$  :  $u_n \geq u_{n_0} \geq A$ .

Donc : pour tout  $n \geq n_0$  :  $u_n \in ] A, +\infty [$ .

**2) Théorème 2 :** • Toute suite croissante et majorée est convergente.

• Toute suite décroissante et minorée est convergente.

## VII- Limites et composition

### 1) Pour les suites

**Théorème 1 :** Soient  $f$  une fonction définie sur  $] a, +\infty [$  et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = f(n)$ .

Si la fonction  $f$  a pour limite  $l$  en  $+\infty$ , alors la suite  $(u_n)$  a pour limite  $l$  en  $+\infty$ .

*Exemple :* Soit  $(u_n)$  telle que  $u_n = \frac{2n^2 + 5n + 1}{n^2 + n}$ . Etudions  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 5n + 1}{n^2 + n}$ .

Soit  $f : x \mapsto \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + x}$ . Alors :  $u_n = f(n)$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 5n + 1}{n^2 + n} = 2$

**Théorème 2 :** Soient  $f$  une fonction définie sur  $I$  et  $(v_n)$  une suite dont tous les termes appartiennent à  $I$ .  $a$  et  $b$  désignent des réels ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = b$ .

*Exemple :* Soit  $(u_n)$  telle que  $u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$ .  $u_n = \sqrt{v_n}$  avec  $v_n = \frac{3n+2}{n+1}$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3} \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}.$$

## **2) Pour les fonctions**

**Définition :** Soient  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ .

La **fonction composée de  $f$  suivie de  $g$** , notée  $g \circ f$ , est la fonction définie sur  $I$  par :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

**Théorème :** Soit  $f, g$  et  $h$  telles que  $h = g \circ f$ .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = c.$$

*Exemples :* • Etudions  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$ .  $x \xrightarrow{f} x^2 + x + 1 \xrightarrow{g} \sqrt{x^2 + x + 1}$

$$x \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} \sqrt{X} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty.$$

• Etudions  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$ .

$$\text{Posons } X = \frac{1}{x}. \quad x \sin \frac{1}{x} = \frac{1}{X} \sin X = \frac{\sin X}{X}$$

$$x \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} \frac{\sin X}{X} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$$

*Ce changement de variable est à noter.*

$$\text{Démonstration de : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 : \quad \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = (\sin x)'_0 = \cos 0 = 1$$

## **VIII- Suites adjacentes**

**1) Définition :** Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)$  est croissante ;
- $(v_n)$  est décroissante ;
- $(u_n - v_n)$  converge vers 0.

*Exemple* : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_n = 1 - \frac{3}{n}$ ,  $v_n = 1 + \frac{2}{n}$ . Montrons que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

$$\bullet u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{3}{n+1} - 1 + \frac{3}{n} = \frac{-3n + 3(n+1)}{n(n+1)} = \frac{3}{n(n+1)}$$

$n(n+1) > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow (u_n)$  est croissante.

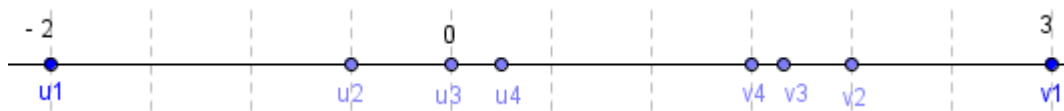
$$\bullet v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{2}{n+1} - 1 - \frac{2}{n} = \frac{2n - 2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)}$$

$n(n+1) > 0 \Rightarrow v_{n+1} - v_n < 0 \Rightarrow (v_n)$  est décroissante.

$$\bullet u_n - v_n = 1 - \frac{3}{n} - 1 - \frac{2}{n} = -\frac{5}{n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-5}{n} = 0 \Rightarrow (u_n - v_n) \text{ converge vers } 0.$$

Donc  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

On a :  $u_1 = -2, v_1 = 3, u_2 = -\frac{1}{2}, v_2 = 2, u_3 = 0, v_3 = \frac{5}{3}, u_4 = \frac{1}{4}, v_4 = \frac{3}{2}, \dots$



On remarque que les intervalles  $[u_n, v_n]$  sont emboîtés et leurs longueurs tendent vers 0.

## **2) Théorème** : Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

*Démonstration (BAC)* : • Montrons que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n < v_n$ .

$(u_n)$  est croissante  $\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

$(v_n)$  est décroissante  $\Rightarrow v_{n+1} - v_n \leq 0$ .

$$(u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) = (u_{n+1} - u_n) - (v_{n+1} - v_n) \Rightarrow (u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) \geq 0$$

$\Rightarrow (u_n - v_n)$  est croissante

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$  donc les termes de la suite  $(u_n - v_n)$  sont négatifs ou nuls.

Donc, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n - v_n \leq 0$ . Donc :  $u_n \leq v_n$  et  $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ .

•  $(u_n)$  est une suite croissante et majorée par  $v_0$ , donc  $(u_n)$  est convergente. Soit  $l$  sa limite.

•  $(v_n)$  est une suite décroissante et minorée par  $u_0$ , donc  $(v_n)$  est convergente. Soit  $l'$  sa limite.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l - l' = 0 \Rightarrow l = l'$$

**Remarque** : Les suites adjacentes permettent d'approcher certains nombres irrationnels.

## IX- Asymptote oblique

**1) Définition :** Lorsqu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ , on dit que la droite  $D$  d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

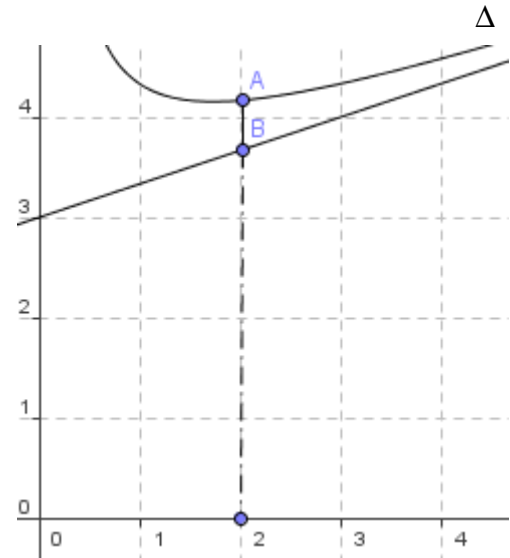
La définition est la même au voisinage de  $-\infty$ .

### Interprétation graphique :

$$AB = |f(x) - (ax + b)|$$

Pour les grandes valeurs de  $x$ ,  $AB$  est voisine de 0.

La droite  $D$  et la courbe  $C$  sont très proches l'une de l'autre.



### 2) Exemple :

Montrer que la droite  $D$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe représentative  $C$  de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}.$$

$$f(x) - (x + 1) = \frac{-1}{x + 2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + 2} = 0 \quad \text{Donc } D \text{ est asymptote à } C.$$

On étudie le signe de  $f(x) - (x + 1)$ , donc de  $\frac{-1}{x + 2}$ . Il est du signe contraire de  $x + 2$ .

Si  $x > -2$ , alors  $\frac{-1}{x + 2} < 0$ . Donc :  $f(x) - (x + 1) < 0$ .  $C$  est au-dessous de  $D$ .

Si  $x < -2$ , alors  $\frac{-1}{x + 2} > 0$ . Donc :  $f(x) - (x + 1) > 0$ .  $C$  est au-dessus de  $D$ .